

Beeldvorming uit waargenomen punten

Wiskunde grafentheorie levert algemene efficiënte methode

Geef een aantal personen een stuk papier waarop een groot aantal puntjes staat en vraag hen wat dat voorstelt. De antwoorden op zo'n 'psychologische test' kunnen hemelsbreed verschillen. Bij veel wetenschappelijk onderzoek komen de gegevens in deze vorm tot ons. Er is dan behoefte aan een algemene methode waarmee men hieruit op eenduidige en efficiënte wijze een beeld kan construeren. Zo'n methode kan grote praktische betekenis hebben. Hoe deze kan worden ontwikkeld is beschreven door Remco Veltkamp in zijn proefschrift 'Gesloten buitenkanten van objecten vanuit verspreide punten'. Het onderzoek is begonnen aan de Rijksuniversiteit Leiden en voortgezet aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam in het kader van een project van de Nationale Faciliteit Informatica.

Waarneming van voorwerpen met behulp van moderne technieken levert vaak een grote verzameling punten op die alle op de buitenkant van het voorwerp liggen. Zo neemt bijvoorbeeld een robot producten op de lopende band waar door middel van laserstralen. De coördinaten van die punten worden opgeslagen in een computergeheugen en nu is het de kunst om daaruit die buitenkant te construeren. Soms is het bekend om welk voorwerp het gaat, maar dit hoeft niet het geval te zijn, bijvoorbeeld bij een door middel van computertomografie waargenomen tumor.

ONEINDIG

De weergave van een voorwerp in de vorm van een aantal punten op zijn buitenkant is niet eenduidig, zelfs als dat aantal zeer groot is: in principe kan men oneindig veel oppervlakken construeren zodanig dat al die punten daarop liggen. Als men echter bijvoorbeeld weet dat het om een menselijk gezicht gaat beperkt dat de keus natuurlijk enorm. Heeft men dergelijke extra informatie over het voorwerp in kwestie of alleen over de wijze waarop de punten zijn gemeten (zodat er bepaalde correlaties zijn), dan kan men de constructiemethode daarop afstemmen en zo vaak veel tijd besparen. Dit heeft echter het nadeel dat de methode elke keer weer anders is. Het zou dus mooi zijn te beschikken over een algemene, efficiënte methode die toepasbaar is op verzamelingen punten zonder onderlinge structurele relaties ('verspreide' punten).

STRATEGIE

In zijn proefschrift ontwikkelt Veltkamp

nieuwe, algemene technieken om uit een verzameling verspreide punten de gesloten buitenkant van een voorwerp te construeren en ermee te manipuleren. De punten worden op een bepaalde manier met elkaar verbonden en de verbindingsstukken vormen samen de geconstrueerde buitenkant. Een belangrijk deel van het onderzoek zit in het vinden van een geschikte verbindingsstrategie. Liggen de punten in een plat vlak, dus als het gaat om een tweedimensionaal voorwerp, dan is de eenvoudigste buitenkant de verzameling rechte lijnstukken die de verbindingen tussen de punten vormen. Bij ruimtelijke voorwerpen bestaat de eenvoudigste buitenkant uit de vlakken van driehoekjes met telkens drie punten van de verzameling als hoekpunten (triangulatie). De hamvraag is nu: welke punten verbind je met elkaar? In de praktijk gaat het meestal om honderden, zo niet duizenden punten. Het aantal manieren om ze met elkaar te verbinden is dan zo astronomisch groot dat het ondoenlijk is alle mogelijke zo te vormen buitenkanten onder de loep te nemen. Er is duidelijk een of ander criterium nodig op grond waarvan één buitenkant wordt gekozen als de beste.

Hier biedt de wiskunde de helpende hand. De punten en hun verbindingen vormen wiskundig gezien een 'graaf'. Dit eeuwenoude begrip werd voor het eerst gebruikt door de grote wiskundige Leonhard Euler toen hij in 1735 zijn oplossing van het beroemde probleem van de 'Zeven Bruggen van Königsberg' aan de Russische Akademie te St. Petersburg presenteerde. Sindsdien is de grafentheorie een niet meer weg te denken onderdeel van de wis-

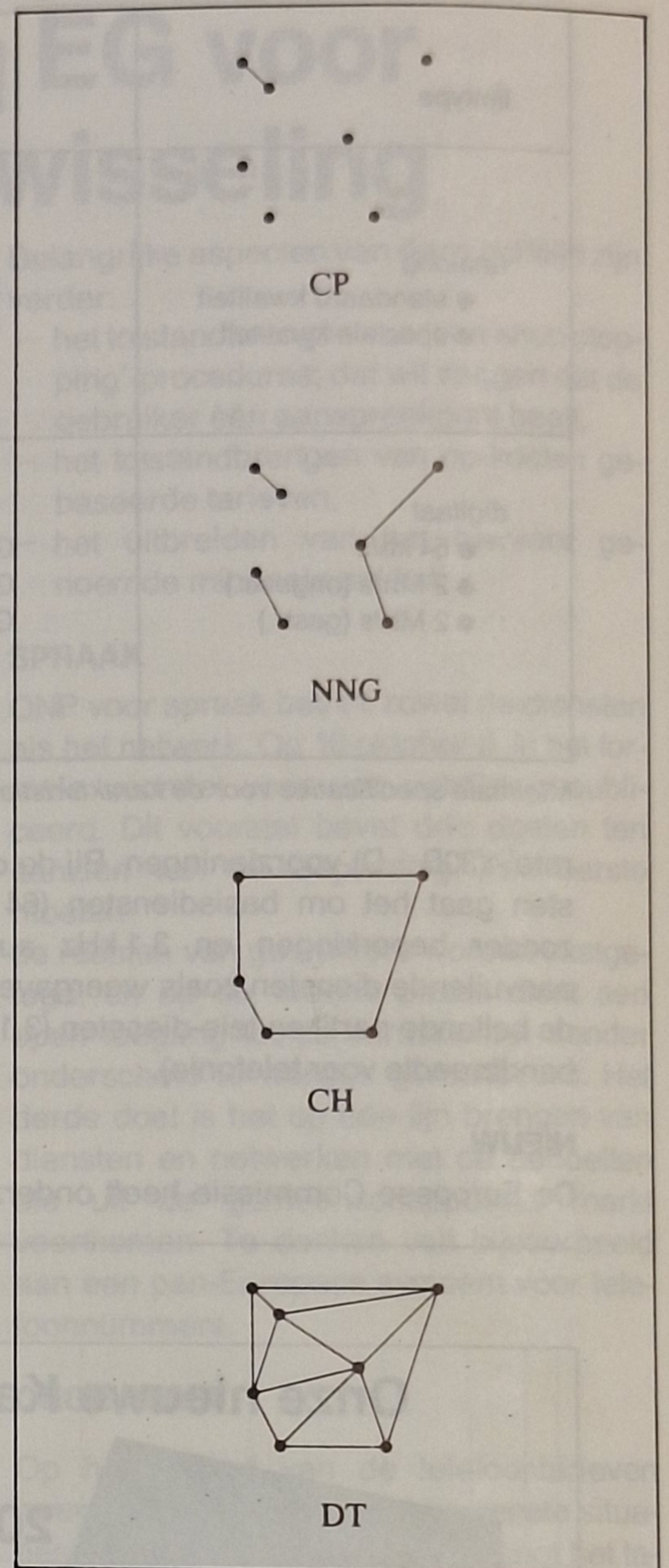


Fig. 1. Enkele meetkundige grafen met dezelfde vertices. Van boven naar beneden: Dichtsbijzinnige Paar, Naaste Buren Graaf, Convexe Omhullende en Delaunay Triangulatie.

kunde, met toepassingen in een groot aantal gebieden, bijvoorbeeld het ontwerpen van chips. Grafen zijn abstracte constructies, waar in het algemeen de punten ('vertices') en hun verbindingen ('randen') geen echte punten en lijnen voorstellen, maar hier is dat wel het geval en spreken we van 'meetkundige' grafen (figuur 1).

STRUCTUUR

We brengen nu in een verzameling verspreide punten structuur aan door bij elk paar punten een 'omgeving' te definiëren en de punten die daarbinnen liggen met het paar te verbinden. Veltkamp definieert deze omgeving als de doorsnede of de vereniging van de twee schijven begrensd door de cirkels (bollen in het ruimtelijke geval) met een bepaalde, nog nader te kiezen straal die door het paar punten gaan. Deze definitie blijkt voordelen te hebben boven tot nu toe gebruikte definities. Zo ontstaat

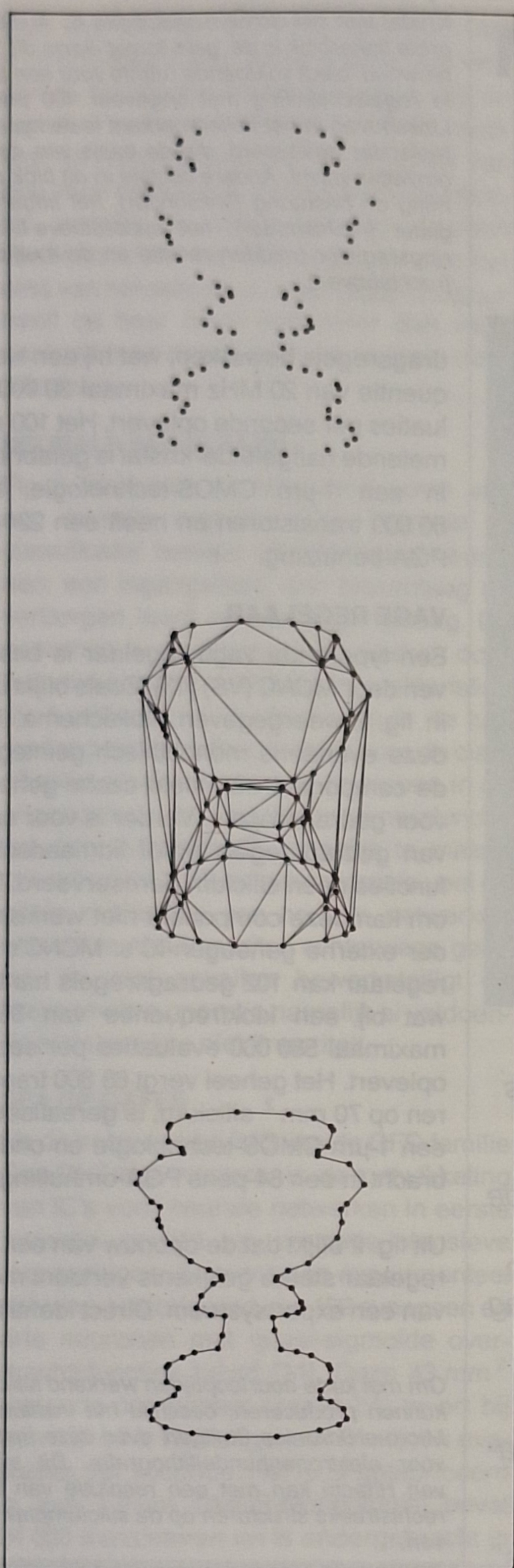


Fig. 2. Een tweedimensionale constructie van Uccello's kelk. Boven: de waargenomen punten (vertices), midden: basis-graaf volgens Veltkamp's methode, onder: de daaruit geconstrueerde buitenkant (een veelhoek) van de kelk.

een graaf die als uitgangspunt dient voor nadere verfijningen. In de volgende fase worden namelijk stap voor stap de 'overbodige' verbindingen weggehaald (figuur 2), een proces dat als twee druppels water lijkt op de werkwijze van een beeldhouwer die begint met een ruwe steenklomp (wiskundigen zouden zeggen: de 'convexe omhullende') en dan geleidelijk delen weghakt om zo tot het uiteindelijke beeld te komen.

Het voordeel van Veltkamp's methode is

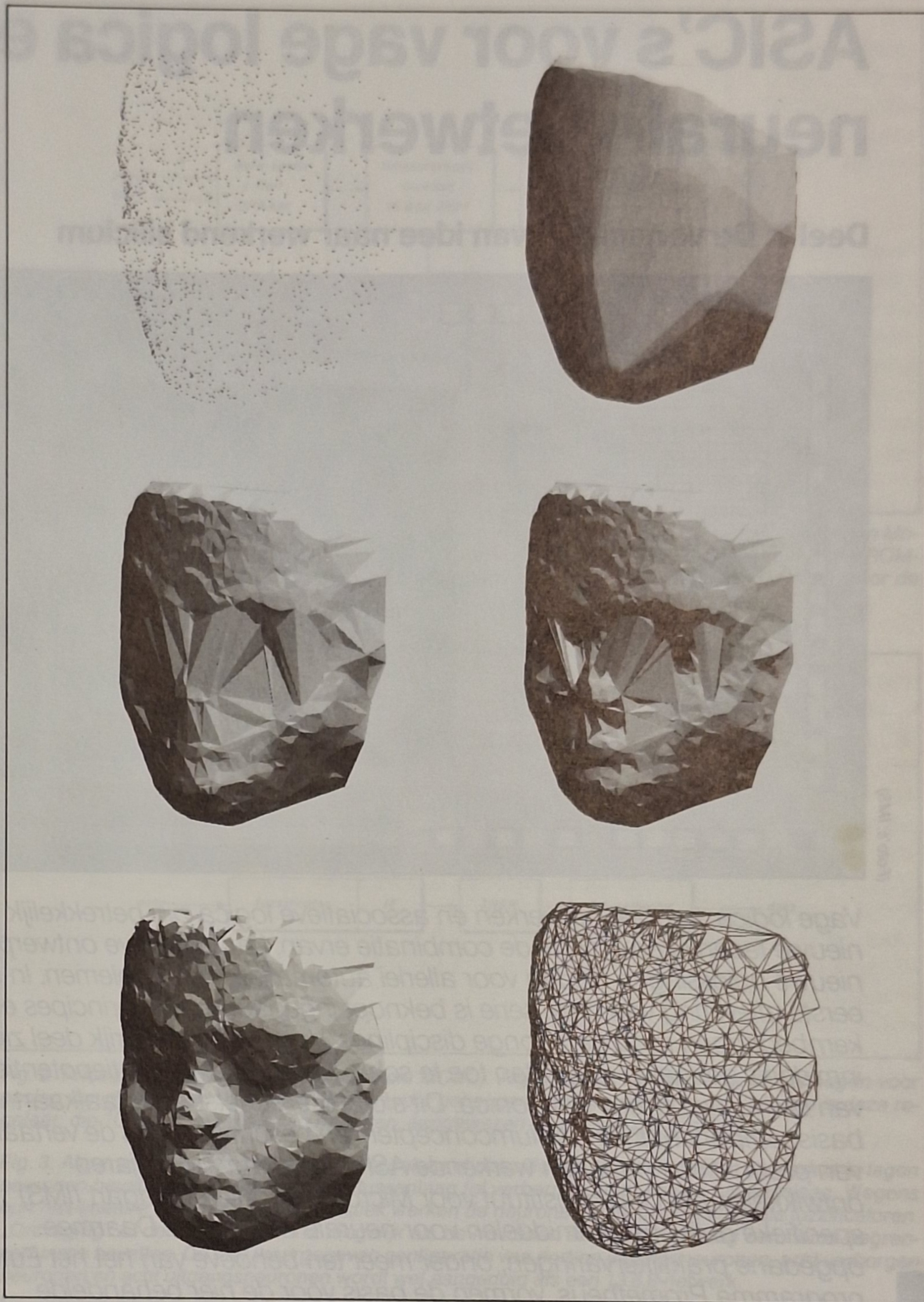


Fig. 3. Reconstructie van een masker uit een verzameling met lasertechniek waargenomen punten (drie-dimensionaal).

Links boven: 1468 verspreide vertices;
 Rechts boven: de Convexe Omhullende, opgebouwd uit 255 vertices en 504 driehoeken;
 Links midden: tussenstap met 1019 vertices en 2034 driehoeken;
 Rechts midden: tussenstap met 1337 vertices en 2670 driehoeken;
 Links onder: de uiteindelijke buitenkant, met 1468 vertices en 2930 driehoeken;
 Rechts onder: de bijbehorende onderliggende draadstructuur.

dat er een algemeen geldige, wiskundig goed gedefinieerde 'hiërarchie' van benaderingen wordt vastgelegd die in de praktijk van grote betekenis kan zijn (figuur 3). De gewenste mate van detaillering van het beeld hangt namelijk sterk af van de toepassing. Bij real-time toepassingen, zoals een bewegende robot die obstakels moet ontwijken, is meestal alleen een globaal beeld van die obstakels voldoende. Bij het ontwerpen van auto's, vliegtuigen of schepen daarentegen is het van belang een zo

realistisch mogelijk beeld te hebben. Bij die toepassingen moeten ook 'smoothing'-technieken worden toegepast: het gladstrijken van de scherpe kantjes die nu eenmaal zitten aan een voorwerp opgebouwd uit driehoekige vlakjes. Veltkamp ontwikkelt in zijn proefschrift ook enkele nieuwe smoothing-technieken. □

Inl.: Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan413,1098SJA Amsterdam.